Планиметрија

1. Израчунати површину правоуглог троугла ако његова висина $h = 2cm$ дели хипотенузу на одсечке чије се дужине разликују за $3cm$.

2. На хипотенузи BC правоуглог троугла ABC дате су тачке D и E такве да је $BE = AB$ и $CD = AC$. Израчунати угао DAE.

3. Круг пречника AC сече хипотенузу AB правоуглог троугла ABC у тачки D. Ако је $BC = 4\sqrt{6}cm$ и $BD = 8cm$, израчунати дужину тетиве AD.

4. Одредити дужину краће катете правоуглог троугла, ако је дужина полупречника његовог уписаног круга $r = 2cm$ и дужина полупречника његовог описаног круга $R = 5cm$.

5. Израчунати дужину симетрале правог угла ако су дужине катета правоуглог троугла $6cm$ и $8cm$.

6. Нека је однос висине и тежишне дужи које одговарају хипотенузи правоуглог троугла $40 : 41$. Одредити однос његових катета.

7. Израчунати површину једнакокраког троугла основице $\sqrt{2}cm$ ако су тежишне дужи које одговарају крацима узајамно нормалне.

8. У једнакокраки троугао основице $2cm$ и крака $3cm$ уписан је круг који додирује краке у тачкама M и N. Израчунати дужину дужи MN.

9. Ако центар уписаног круга једнакокраког троугла дели висину која одговара основици на одсечке дужина $5cm$ и $3cm$, израчунати обим тог троугла.

10. У једнакокраки троугао чија је висина једнака основици уписан је правоугаоник тако да му једна страница лежи на основици, а дијагонала је нормална на крак троугла. Одредити однос површина троугла и правоугаоника.

11. У једнакокраки троугао основице $10cm$ и крака $13cm$ уписан је квадрат тако да два његова темена леже на основици, а друга два на крацима троугла. Израчунати обим квадрата.

12. Дужина основице једнакокраког троугла ABC је 16, а краци су дужине 10. Израчунати дужину дужи SO, ако су O и S редом центри уписаног и описаног круга троугла ABC.

13. У троуглу површине $P = 8\sqrt{3}cm^2$, коме је дужина једне странице $c = 8cm$, $c > a > b$, разлика између средњег по величини и најмањег угла једнака је разлици између највећег и средњег угла. Одредити обим тог троугла.

14. Нека се тежишне дужи AD и CE троугла ABC секу у тачки T. Ако је тачка F средиште дужи AE, одредити однос површина троуглова TFE и ABC.

15. Израчунати површину троугла ABC ако су дужине страница $|BC| = 12cm$, $|AC| = 20cm$ и дужине тежишне дужи $|CD| = 2\sqrt{19}cm$.

16. Ако дужпаралелна страници троугла дужине a cm дели троугао на два дела једнаких површина, израчунати њену дужину.

17. У тупоуглом троуглу су дате дужине две странице $a = 15$, $b = 13$ и дужина полупречника описаног круга $R = 8,125$. Одредити дужину треће странице троугла.

18. Кроз тачку унутар троугла ABC конструисане су праве паралелне страницама троугла. На тај начин формирана су три мања троугла чије су површине 1, 4 и 9. Одредити површину троугла ABC.

19. У троуглу ABC угао код темена A је два пута већи од угла код темена B, а дужине страница су $|AC| = 2cm$ и $|AB| = 3cm$. Израчунати дужину треће странице троугла.

20. Дијагонала правоугаоника дужине $10cm$ са једном страницом заклапа угао мере $15°$. Одредити површину тог правоугаоника.

21. Ако је дужина странице квадрата $ABCD$ $12cm$, M средиште странице BC, а N средиште странице CD, израчунати дужину полупречника круга уписаног у троугао AMN.

22. Кружница чији се центар поклапа са центром квадрата дели сваку његову страницу на три једнака дела. Одредити однос површина круга и квадрата.

23. Ако су основице једнакокраког трапеза дужина $20cm$ и $12cm$, а центар описаног круга лежи на већој основици, израчунати дужине дијагонала и крака тог трапеза.

24. Одредити однос основица трапеза ако га средња линија дели на два дела чије су површине у односу $3 : 2$.

25. Дати су троугао ABC и ромб $BDEF$ чија сва темена припадају страницама троугла ABC и $\sphericalangle DEF$ је туп. Одредити површину троугла ABC ако је $AE = 3$, $CE = 7$ и ако је полупречник круга уписаног у ромб једнак 1.

26. Израчунати дужину тетиве круга полупречника $2cm$ којој одговара периферијски угао од $15°$.

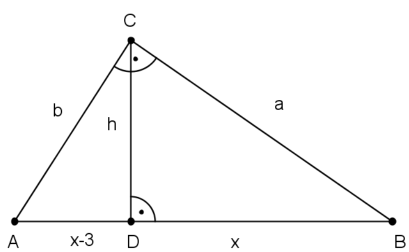
27. Ако се тетиве AB и CD круга k секу у тачки S и $|AS| = \sqrt{2}+1$, $|SB| = \sqrt{2}-1$, $|CS| = \sqrt{3}+1$, израчунати дужину дужи SD.

28. Дијагонале тетивног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки S. Одредити AC ако је $BC = CD$, $SC = 4$ и $CD = 6$.

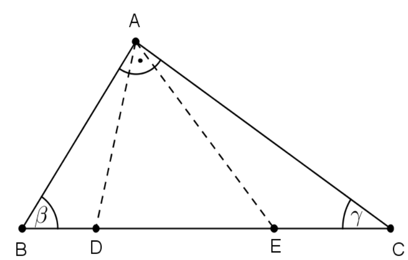
29. Два круга полупречника $4cm$ се додирују. Колики је полупречник круга који споља додирује дате кругове и њихову заједничку спољашњу тангенту?

Решења задатака

1. Уочавамо да је $\triangle ADC \overset{(\text{ууу})}{\sim} \triangle CDB$ (слика 1), па су одговарајуће странице тих троуглова пропорционалне, тј.
$$AD : CD = CD : BD.$$
Одатле је
$$(x-3) : h = h : x \Leftrightarrow h^2 = x(x-3) \Leftrightarrow 4 = x^2 - 3x.$$
Последња квадратна једначина има решење $x = 4$ (решење $x = -1$ не узимамо у обзир јер је x позитивна вредност). Како је површина правоуглог троугла једнака половини производа дужине хипотенузе и дужине њој одговарајуће висине, одатле је
$$P = \frac{(x + x - 3)h}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5\text{cm}^2.$$

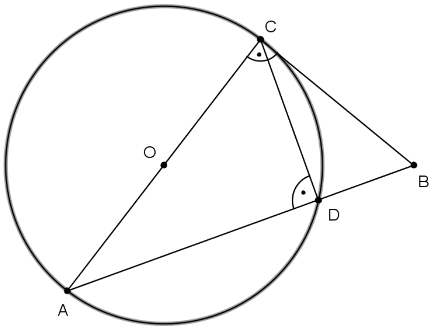


Слика 1

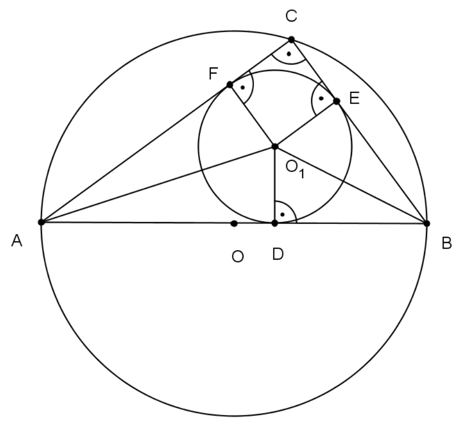


Слика 2

2. Троугао ABE је једнакокраки јер је $AB = BE$ (слика 2). Одатле је, уз чињеницу да је збир мера углова у троуглу једнак π,
$$\measuredangle BEA = \measuredangle BAE = \frac{\pi - \beta}{2}.$$
Троугао ACD је једнакокраки, јер је $AC = CD$. Одатле је
$$\measuredangle ADC = \measuredangle DAC = \frac{\pi - \gamma}{2}.$$
Коначно је, из $\triangle ADE$,
$$\measuredangle DAE = \pi - \frac{\pi - \beta}{2} - \frac{\pi - \gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2},$$
а како је $\beta + \gamma = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, јер је $\triangle ABC$ правоугли, следи да је
$$\measuredangle DAE = \frac{\pi}{4}.$$



Слика 3



Слика 4

3. Угао ADC (слика 3) је периферијски угао над пречником AC круга, па је $\measuredangle ADC = \frac{\pi}{2}$. Из $\triangle BCD$, који је правоугли, на основу Питагорине теореме долазимо до

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 \Leftrightarrow CD^2 = 96 - 64 = 32 \Leftrightarrow CD = 4\sqrt{2}\text{cm}.$$

Дуж CD је висина правоуглог $\triangle ABC$, која одговара хипотенузи AB. Уочимо да је $\triangle ADC \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle CDB$, па су одговарајуће странице тих троуглова пропорционалне, одакле је, по угледу на 1. задатак,

$$CD = \sqrt{AD \cdot BD} \Leftrightarrow CD^2 = AD \cdot BD \Leftrightarrow AD = \frac{CD^2}{BD} = \frac{32}{8} = 4\text{cm}.$$

4. Означимо са O центар описаног, а са O_1 центар уписаног круга правоуглог $\triangle ABC$ (слика 4). Дуж O_1D је нормална на страницу AB и представља полупречник уписаног круга, чија је дужина 2cm. Нека је $AD = x$ и $BD = y$. Тада је

$$x + y = 2 \cdot 5 \Leftrightarrow x = 10 - y.$$

Важи да је $\triangle ADO_1 \overset{(\text{ССУ})}{\cong} \triangle AFO_1$, па је $AF = AD = x$. Такође, $\triangle BDO_1 \overset{(\text{ССУ})}{\cong} \triangle BEO_1$, па је $BE = BD = y$. Како је O_1ECF квадрат (сви углови су мере $\frac{\pi}{2}$ и има пар суседних страница исте дужине), видимо да је $CF = CE = 2$cm. Површина троугла ABC је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{(10-y+2)(y+2)}{2} = \frac{(12-y)(y+2)}{2}.$$

Такође је

$$P_{\triangle ABC} = 2P_{\triangle ADO_1} + 2P_{\triangle BDO_1} + P_{O_1ECF} = 2 \cdot \frac{xr}{2} + 2 \cdot \frac{yr}{2} + r^2 = 2(\underbrace{x+y}_{10}+2) = 24.$$

Одатле је

$$\frac{(12-y)(y+2)}{2} = 24,$$

па се решавањем ове квадратне једначине добија да је $y = 4\text{cm}$ или $y = 6\text{cm}$, одакле је редом $x = 6\text{cm}$ или $x = 4\text{cm}$. Према томе, катете правоуглог троугла ABC су дужина 6cm и 8cm, па је дужина краће катете 6cm.

5. Важи да је $\measuredangle EAD = \measuredangle FDA = \frac{\pi}{4}$ и $\measuredangle FAD = \measuredangle ADE = \frac{\pi}{4}$, јер су у питању углови са паралелним крацима (слика 5). Одатле је $AEDF$ квадрат, па је $AE = DE$.

   Важи да је $\triangle ABC \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle DEB$, па је одатле

$$AC : AB = DE : BE \Leftrightarrow AC : AB = DE : (AB - AE) \Leftrightarrow AC : AB = DE : (AB - DE)$$
$$\Leftrightarrow 6 : 8 = DE : (8 - DE).$$

   Одатле је $DE = \dfrac{24}{7}\text{cm}$, што је дужина странице квадрата $AEDF$. Дуж AD, чију дужину тражимо, дијагонала је квадрата $AEDF$, па је $AD = DE\sqrt{2} = \dfrac{24\sqrt{2}}{7}\text{cm}$.

6. Углови CAB и DCB су углови са нормалним крацима, па су подударни, тј. $\measuredangle CAB = \measuredangle DCB = \alpha$ (слика 6). Присетимо се чињенице да је код правоуглог троугла дужина тежишне дуж која одговара хипотенузи једнака половини дужине хипотенузе, тј. $t_c = \frac{c}{2}$. Даље је

$$h_c : t_c = 40 : 41 \Leftrightarrow h_c = \frac{40t_c}{41}.$$

   Како је $\triangle C_1DC$ правоугли, онда је

$$C_1D = \sqrt{t_c^2 - h_c^2} = \sqrt{t_c^2 - \frac{1600t_c^2}{1681}} = \sqrt{\frac{81t_c^2}{1681}} = \frac{9t_c}{41}.$$

   Пошто је $\triangle ADC \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle BDC$, одатле је

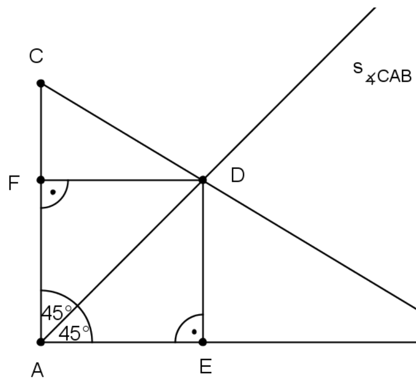
$$AC : BC = AD : CD \Leftrightarrow AC : BC = (AC_1 + C_1D) : CD \Leftrightarrow AC : BC = \left(t_c + \frac{9t_c}{41}\right) : \frac{40t_c}{41}$$
$$\Leftrightarrow AC : BC = \frac{50t_c}{41} \cdot \frac{41}{40t_c} \Leftrightarrow AC : BC = 5 : 4.$$

7. На слици 7 видимо да је $\triangle BCC_1 \overset{(\text{СУС})}{\cong} \triangle BCB_1$, одакле је $BB_1 = CC_1$ и $\measuredangle B_1BC = \measuredangle C_1CB$. Према томе, $\triangle BCT$ је једнакокрако правоугли троугао, одакле је $BT = CT$. Како је $BC = BT\sqrt{2} = \sqrt{2}\text{cm}$, следи да је $BT = CT = 1\text{cm}$. С обзиром на то да тежиште T дели тежишну дуж на делове чије се дужине у односу $2:1$, следи да је

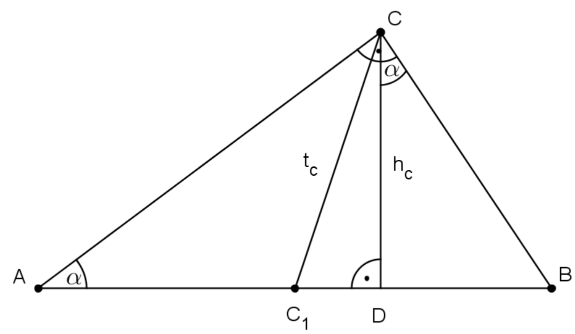
$$BT : TB_1 = CT : TC_1 = 2 : 1,$$

   па је $TC_1 = TB_1 = \dfrac{1}{2}\text{cm}$. Ако посматрамо правоугли $\triangle BC_1T$, видимо да је

$$BC_1 = \sqrt{BT^2 + C_1T^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\text{cm},$$



Слика 5



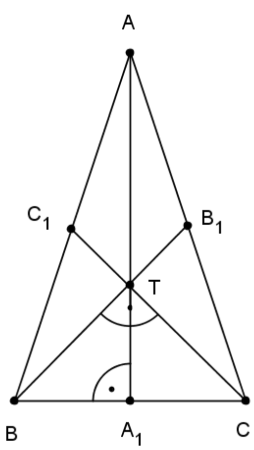
Слика 6

одакле је $AB = AC = 2BC_1 = \sqrt{5}$cm. Ако посматрамо правоугли $\triangle ABA_1$, видимо да је

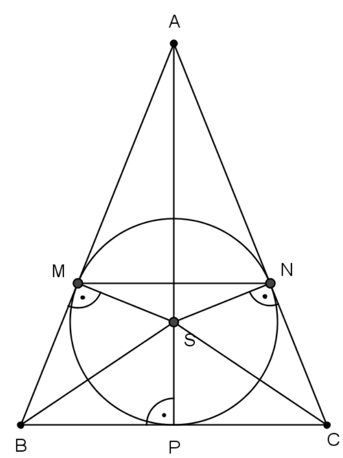
$$AA_1 = \sqrt{AB^2 - BA_1^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{cm}.$$

Коначно је

$$P = \frac{BC \cdot AA_1}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{3}{2}\text{cm}^2.$$



Слика 7



Слика 8

8. Уочавамо (слика 8) да је

$$\triangle BPS \overset{(\text{ССУ})}{\cong} \triangle BMS \Rightarrow BP = BM = 1 \Rightarrow AM = AB - BM = 2$$

и

$$\triangle CPS \overset{(\text{ССУ})}{\cong} \triangle CNS \Rightarrow CP = CN = 1 \Rightarrow AN = AC - CN = 2.$$

Одатле је $AM : AB = AN : AC = 2 : 3$, па је на основу обратне Талесове теореме $MN \parallel BC$. Одатле је на основу директне Талесове теореме $AM : AB = MN : BC$, па је

$$MN = \frac{AM \cdot BC}{AB} = \frac{4}{3}\text{cm}.$$

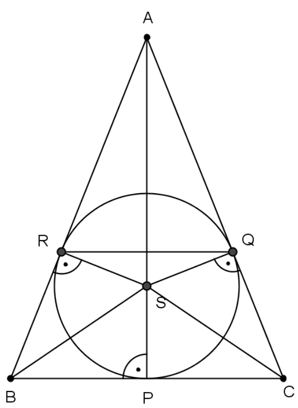
9. Ако са S означимо центар уписаног круга у $\triangle ABC$, онда је SP одсечак висине дужине 3cm, а уједно и полупречник тог круга (слика 9). Одатле је $SP = SR = SQ = 3$cm. Из $\triangle ASR$ је $AR = \sqrt{AS^2 - SR^2} = \sqrt{25-9} = 4$cm.

Једноставно се уочава да је $\triangle BSP \overset{(\text{ССУ})}{\cong} \triangle BSR$, па је одатле $BP = BR$.

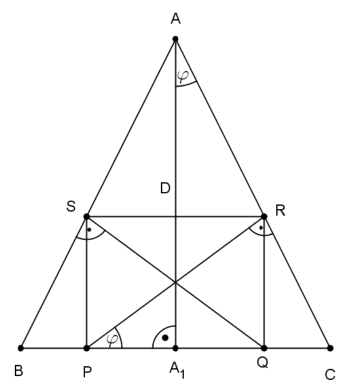
Такође се једноставно уочава да је $\triangle ASR \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle ABP$, па је одатле

$$AS : SR = AB : BP \Leftrightarrow 5 : 3 = (4 + BP) : BP \Leftrightarrow 5BP = 12 + 3BP \Leftrightarrow BP = 6\text{cm}.$$

Сада је $BC = 2BP = 12$cm, $AB = AC = 10$cm, па је $O = 32$cm.



Слика 9



Слика 10

10. Важи да је $\measuredangle A_1AC = \measuredangle CPR = \varphi$, јер су у питању углови са нормалним крацима (слика 10). Одатле важи да је $\triangle AA_1C \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle PQR$, па следи да је

$$AA_1 : A_1C = PQ : QR \Leftrightarrow 1 : \frac{1}{2} = PQ : QR \Leftrightarrow QR = \frac{PQ}{2}.$$

Следи да је

$$P_{PQRS} = PQ \cdot QR = \frac{PQ^2}{2}.$$

Пошто је $BC = AA_1$, онда је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AA_1}{2} = \frac{AA_1^2}{2}.$$

Како је $\triangle ADR \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle AA_1C$, па је

$$AD : DR = AA_1 : A_1C = 1 : \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(AA_1 - \frac{PQ}{2}\right) : \frac{PQ}{2} = 1 : \frac{1}{2} \Leftrightarrow AA_1 - \frac{PQ}{2} = PQ \Leftrightarrow AA_1 = \frac{3}{2}PQ.$$

Коначно је

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{PQRS}}=\frac{\frac{AA_1^2}{2}}{\frac{PQ^2}{2}}=\frac{\frac{9PQ^2}{4}}{PQ^2}=\frac{9}{4}.$$

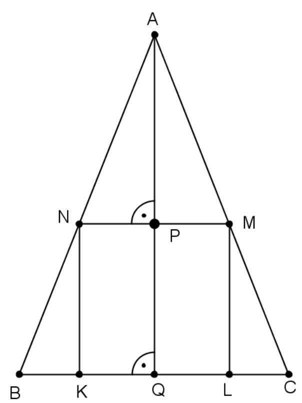
11. Из правоуглог $\triangle ABQ$ (слика 11) следи да је

$$h=AQ=\sqrt{AB^2-BQ^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12\text{cm}.$$

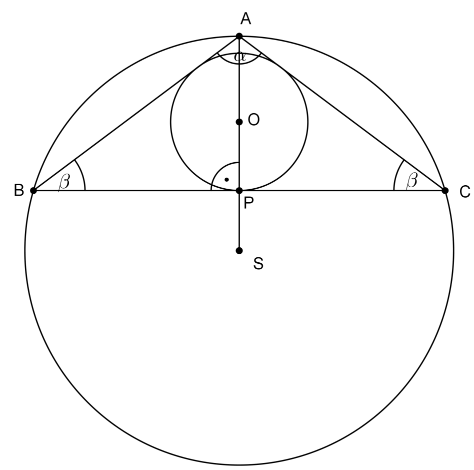
Уочавамо да је $\triangle ABQ \overset{(\text{ууу})}{\sim} \triangle ANP$, па је одатле

$$BQ:AQ=NP:AP\Leftrightarrow 5:12=NP:(12-PQ)\Leftrightarrow 5:12=NP:(12-2NP)\Leftrightarrow NP=\frac{60}{22}\text{cm}.$$

Коначно је $O=8NP=\dfrac{240}{11}\text{cm}$.



Слика 11



Слика 12

12. Ако је AP висина троугла ABC (слика 12), онда је

$$AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6\text{cm},$$

па је

$$P_{\triangle ABC}=\frac{BC\cdot AP}{2}=\frac{16\cdot 6}{2}=48\text{cm}^2.$$

Ако са s означимо полуобим троугла ABC, онда је

$$s=\frac{AB+BC+AC}{2}=\frac{36}{2}=18\text{cm}.$$

Користећи чињеницу да је површина троугла једнака производу полуобима s тог троугла и полупречника r круга уписаног у тај троугао, имамо да је

$$P_{\triangle ABC}=s\cdot r\Leftrightarrow 48=18\cdot r\Leftrightarrow r=\frac{8}{3}\text{cm}.$$

Посматрајући правоугли $\triangle ABP$ и $\measuredangle ABP = \beta$, с обзиром на то да је синус угла β једнак количнику дужине катете наспрам угла β и дужине хипотенузе тог троугла, видимо да је

$$\sin\beta = \frac{AP}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Сада, ако са R означимо полупречник описаног круга око $\triangle ABC$, примењујући синусну теорему на $\triangle ABC$, добијамо да је

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = \frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\beta} = 2R,$$

а одатле је, користећи последњу једнакост у низу,

$$R = \frac{AC}{2\sin\beta} = \frac{10}{2\cdot\frac{3}{5}} = \frac{25}{3}\text{cm}.$$

Онда је

$$SP = AS - AP = R - AP = \frac{25}{3} - 6 = \frac{7}{3}\text{cm},$$

па је

$$OS = SP + OP = SP + r = \frac{7}{3} + \frac{8}{3} = 5\text{cm}.$$

13. Како је $c > a > b$, онда је $\gamma > \alpha > \beta$ (слика 13). Како је, по услову задатка,

$$\alpha - \beta = \gamma - \alpha,$$

одатле је

$$\gamma + \beta = 2\alpha \Leftrightarrow \alpha + \gamma + \beta = 3\alpha \Leftrightarrow \pi = 3\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Како је $\sin\alpha = \dfrac{CD}{AC}$, одатле је $CD = AC\cdot\sin\alpha$, па је

$$P_{\triangle ABC} = \frac{AB\cdot CD}{2} = \frac{AB\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2} \Leftrightarrow AC = \frac{2\cdot 8\sqrt{3}}{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\text{cm}.$$

Даље је, из правоуглог $\triangle ADC$,

$$AD = AC\cdot\cos\alpha = \frac{AC}{2} = 2\text{cm}$$

и

$$CD = AC\cdot\sin\alpha = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\text{cm}.$$

Такође је $BD = AB - AD = 8 - 2 = 6\text{cm}$, па је

$$BC = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{12 + 36} = 4\sqrt{3}\text{cm}.$$

Коначно је

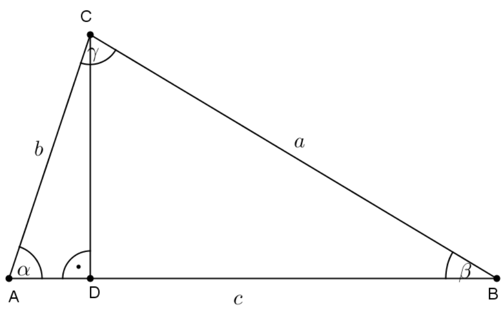
$$O = AB + BC + AC = (12 + 4\sqrt{3})\text{cm}.$$

14. Нека је CP дуж нормална на страницу AB и TQ дуж нормална на страницу AB (слика 14). Уочимо да је $\triangle ETQ \overset{(УУУ)}{\sim} \triangle ECP$. Одатле је

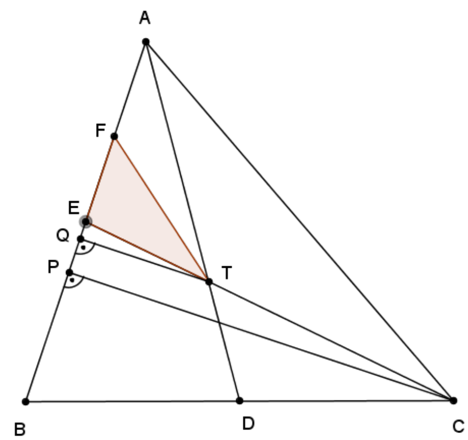
$$ET : EC = QT : PC \Leftrightarrow 1 : 3 = QT : PC \Leftrightarrow QT = \frac{PC}{3}.$$

Коначно је,

$$\frac{P_{\triangle TFE}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{\dfrac{\dfrac{AB}{4} \cdot \dfrac{PC}{3}}{2}}{\dfrac{AB \cdot CP}{2}} = \frac{1}{12}.$$



Слика 13



Слика 14

15. Како је $AD = BD = \dfrac{c}{2}$ (слика 15), онда је

$$P_{\triangle ADC} = \frac{ch}{4} = P_{\triangle DBC}.$$

Подсетимо се Хероновог обрасца: ако је $s = \dfrac{a+b+c}{2}$, онда је

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Примењујући Херонов образац на $\triangle ADC$ и $\triangle DBC$, имамо да је

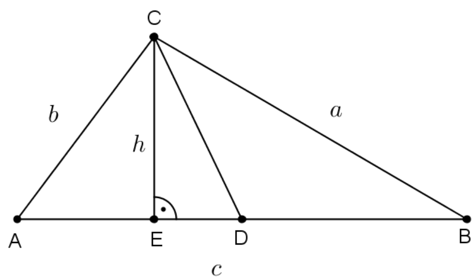
$$\begin{aligned} P^2_{\triangle ADC} &= \left(10 + \sqrt{19} + \frac{a}{4}\right)\left(10 + \sqrt{19} - \frac{a}{4}\right)\left(10 - \sqrt{19} + \frac{a}{4}\right)\left(-10 + \sqrt{19} + \frac{a}{4}\right) \\ &= \left((10 + \sqrt{19})^2 - \frac{a^2}{16}\right)\left(\frac{a^2}{16} - (10 - \sqrt{19})^2\right) \end{aligned}$$

и

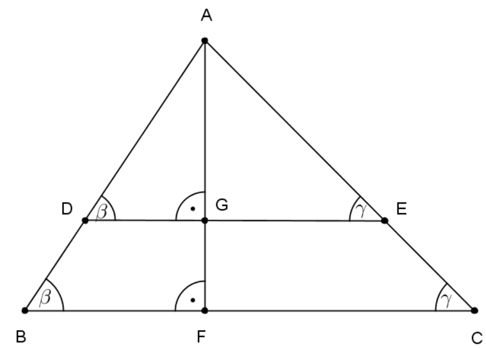
$$\begin{aligned} P^2_{\triangle DBC} &= \left(6 + \sqrt{19} + \frac{a}{4}\right)\left(6 + \sqrt{19} - \frac{a}{4}\right)\left(6 - \sqrt{19} + \frac{a}{4}\right)\left(-6 + \sqrt{19} + \frac{a}{4}\right) \\ &= \left((6 + \sqrt{19})^2 - \frac{a^2}{16}\right)\left(\frac{a^2}{16} - (6 - \sqrt{19})^2\right). \end{aligned}$$

Изједначавањем ова два израза, добијамо да је $a^2 = 784$, па је $a = 28\text{cm}$. Одатле је $s = 30\text{cm}$ и

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{30\cdot 18\cdot 10\cdot 2} = 60\sqrt{3}\text{cm}^2.$$



Слика 15



Слика 16

16. На слици 16 уочавамо да је $\triangle ABC \overset{(\text{ууу})}{\sim} \triangle ADE$, па је

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AG}{AF} = k \Leftrightarrow DE = k\cdot BC \wedge AG = k\cdot AF.$$

Одатле је

$$\frac{P_{\triangle ADE}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{1}{2} = \frac{\dfrac{k\cdot BC\cdot k\cdot AF}{2}}{\dfrac{BC\cdot AF}{2}} = k^2.$$

Дакле, $k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, па је $DE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

17. Према синусној теореми је

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Према томе (слика 17),

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{15\cdot 4}{65},\quad \sin\beta = \frac{b}{2R} = \frac{13\cdot 4}{65}.$$

Пошто је $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, онда је $\cos\alpha < 0$ и, уз чињеницу да је $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, следи да је

$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \frac{225\cdot 16}{65^2}} = -\sqrt{\frac{625}{65^2}} = -\frac{5}{13}.$$

Пошто је $\beta < \dfrac{\pi}{2}$, онда је $\cos\beta > 0$ и

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{169\cdot 16}{65^2}} = \sqrt{\frac{1521}{65^2}} = \frac{3}{5}.$$

Како је $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$, онда је

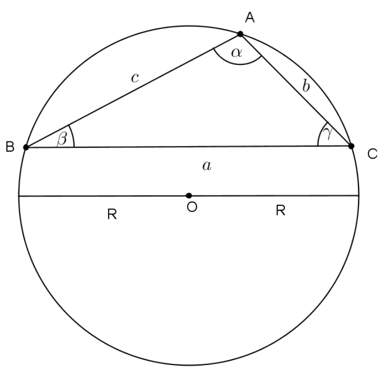
$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta,$$

па је

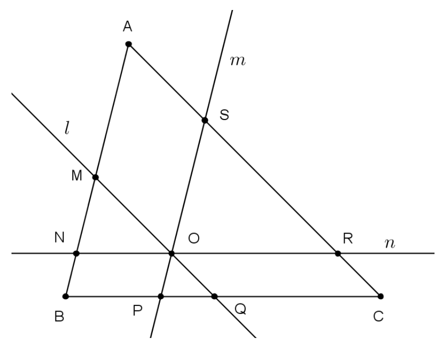
$$\sin\gamma = \frac{13\cdot 4}{65} \cdot \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{13\cdot 4}{65} = \frac{16}{65}.$$

Коначно је

$$c = 2R\sin\gamma = \frac{65}{4} \cdot \frac{16}{65} = 4.$$



Слика 17



Слика 18

18. Може се уочити (слика 18) да је $\triangle OPQ \overset{(\text{ууу})}{\sim} \triangle MNO$ (одговарајући углови на трансферзали су подударни), па је

$$PQ : NO = h_{PQ} : h_{NO} = 1 : k$$

и

$$P_{\triangle OPQ} : P_{\triangle MNO} = \frac{PQ \cdot h_{PQ}}{2} : \frac{NO \cdot h_{NO}}{2} = 1 : k^2 \Leftrightarrow 1 : 4 = 1 : k^2 \Leftrightarrow k = 2.$$

Одатле је

$$NO = 2PQ = 2x, \quad MO = 2OQ = 2y, \quad MN = 2PO = 2z.$$

Слично је $\triangle OPQ \overset{(\text{ууу})}{\sim} \triangle ORS$, па је

$$P_{\triangle OPQ} : P_{\triangle ORS} = PQ^2 : OR^2 \Leftrightarrow 1 : 9 = PQ^2 : OR^2.$$

Одатле је

$$OR = 3x, \quad SR = 3y, \quad OS = 3z.$$

Пошто је $n \parallel BC$, $m \parallel AB$, и $l \parallel AC$, следи да су $BPON$, $QCRO$ и $OSAM$ паралелограми, па је $BP = 2x$, $QC = 3x$, $CR = y$, $AS = 2y$, $AM = 3z$, $BN = z$, а одатле $BC = 6x$, $AC = 6y$, $AB = 6z$.

Коначно, ако уочимо да је $\triangle OPQ \overset{(\text{ууу})}{\sim} \triangle ORS$, онда је

$$P_{\triangle ABC} : P_{\triangle PQO} = BC^2 : PQ^2 = 36 : 1 \Leftrightarrow P_{\triangle ABC} = 36.$$

19. По угледу на 17. задатак, користећи синусну теорему и то да је $\sin\gamma = \sin(\beta + 2\beta) = \cdots = \sin\beta(4\cos^2\beta - 1)$, долази се до решења $a = \sqrt{10}$cm.

20. Површина правоугаоника је $P = AB \cdot BC$. Из правоуглог $\triangle ABC$ (слика 19) следи да је

$$AB = AC \cdot \cos 15^\circ, \quad BC = AC \cdot \sin 15^\circ.$$

Према томе је, уз једнакост $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$,

$$P = AC \cdot \cos 15^\circ \cdot AC \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{2} \cdot AC^2 \cdot \sin 30^\circ = 25\text{cm}^2.$$

21. Уочимо (слика 20) да је $AM = AN = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$cm. Такође је $NM = \frac{12}{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$cm. Даље је

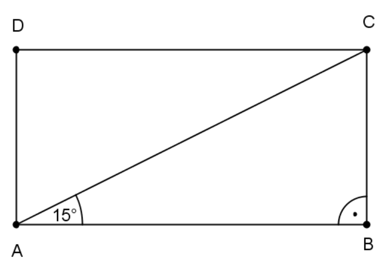
$$AL = \sqrt{AN^2 - NL^2} = \sqrt{36 \cdot 5 - 9 \cdot 2} = 9\sqrt{2}\text{cm}.$$

Ако је $\measuredangle ANM = 2\alpha$, онда је, из $\triangle ANL$

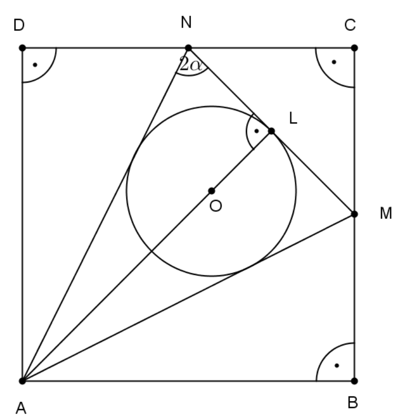
$$\text{tg}2\alpha = \frac{AL}{NL} = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = 3 = \frac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}.$$

Одатле је $3\text{tg}^2\alpha + 2\text{tg}\alpha - 3 = 0$, што је квадратна једначина, чије је решење $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{10} - 1}{3}$. Сада, из $\triangle NLO$ следи да је

$$\text{tg}\alpha = \frac{OL}{NL} = \frac{r}{NL} \Leftrightarrow r = NL \cdot \text{tg}\alpha = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{10} - 1}{3} = (2\sqrt{5} - \sqrt{2})\text{cm}.$$



Слика 19



Слика 20

22. Ако дужину странице квадрата означимо са a и са R полупречник дате кружнице (слика 21), онда је

$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{10a^2}{36}.$$

Коначно је

$$P_1 : P_2 = \frac{10a^2}{36}\pi : a^2 = \frac{10\pi}{36} : 1.$$

23. Како је трапез $ABCD$ једнакокраки (слика 22), важи да је $AE = x = \dfrac{20-12}{2} = 4\text{cm}$. Како је $\measuredangle ADB$ периферијски угао над пречником описаног круга, он је прав, па је $\triangle ADB$ правоугли, одакле је

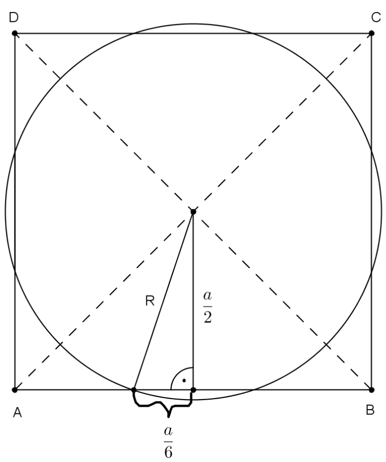
$$DE = \sqrt{AE \cdot BE} = \sqrt{4 \cdot 16} = 8\text{cm}.$$

Даље, из $\triangle ADE$ је

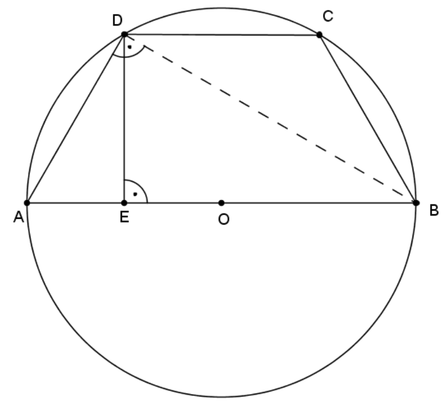
$$AD = BC = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}\text{cm},$$

а из $\triangle ADB$ је

$$AC = DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 8\sqrt{5}\text{cm}.$$



Слика 21



Слика 22

24. Средња линија датог трапеза (слика 23) је $m = \dfrac{a+b}{2}$. Тада је

$$P_{ABNM} = \frac{a+m}{2} \cdot \frac{h}{2}, \quad P_{MNCD} = \frac{b+m}{2} \cdot \frac{h}{2},$$

па је

$$\begin{aligned} \frac{P_{ABNM}}{P_{MNCD}} = \frac{3}{2} &\Leftrightarrow 2P_{ABNM} = 3P_{MNCD} \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{a+m}{2} \cdot \frac{h}{2} = 3 \cdot \frac{b+m}{2} \cdot \frac{h}{2} \\ &\Leftrightarrow 2a + 2m = 3b + 3m \\ &\Leftrightarrow 2a - 3b = m \\ &\Leftrightarrow 2a - 3b = \frac{a+b}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{3a}{2} = \frac{7b}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

25. Нека су $BD = CD = EF = FB = a$ странице ромба и EG његова висина (слика 24). Дужина те висине представља двоструку дужину полупречника круга уписаног у ромб, па је $EG = 2$cm. Уочимо да је $\triangle DCE \overset{(УУУ)}{\sim} \triangle ACE$, одакле се добија да је $AF = \dfrac{3a}{7}$ и $DC = \dfrac{7a}{3}$. Такође, како је $\triangle AHB \overset{(УУУ)}{\sim} \triangle EGD$, добија се да је $AH = \dfrac{20}{7}$. Према томе,

$$P_{\triangle ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{7}\left(a + \frac{7a}{3}\right) = \frac{100a}{21}.$$

Да бисмо одредили a, посматрамо $\triangle DCE$, чија је површина

$$P_{\triangle DCE} = \frac{DC \cdot EG}{2} = DC = \frac{7a}{3}.$$

Такође је, према Хероновом обрасцу,

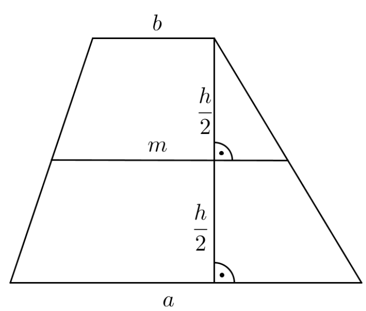
$$P_{\triangle DCE} = \sqrt{s(s-DC)(s-CE)(s-ED)},$$

где је s полуобим троугла DCE. Одатле је

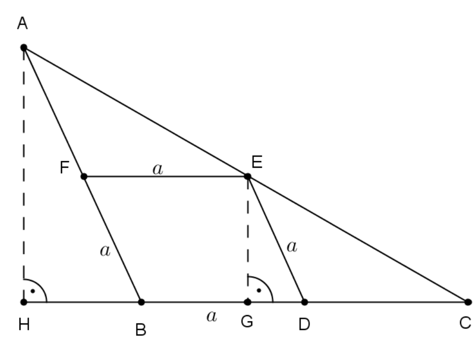
$$\sqrt{s(s-DC)(s-CE)(s-ED)} = \frac{7a}{3}.$$

Квадрирањем и заменом полуобима s долазимо до квадратне једначине, чија су решења $a = \dfrac{21\sqrt{2}}{2}$ и $a = \dfrac{21\sqrt{2}}{4}$. Коначно је

$$P_{\triangle ABC} = 50\sqrt{2} \quad \text{или} \quad P_{\triangle ABC} = 25\sqrt{2}.$$



Слика 23



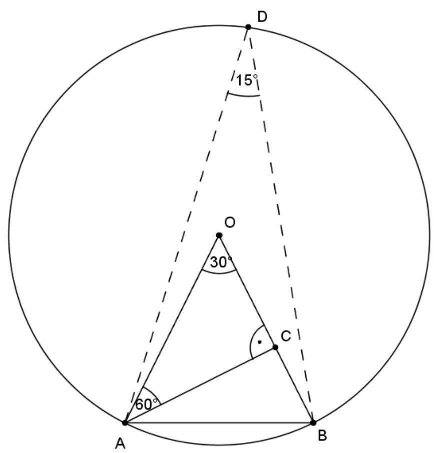
Слика 24

26. Познато је да је централни угао над тетивом двоструко већи од периферискoг угла над том тетивом, па је $\measuredangle AOB = 2 \cdot 15^\circ = 30^\circ$ (слика 25). Нека је $AC \underset{C}{\perp} OB$. Следи да је

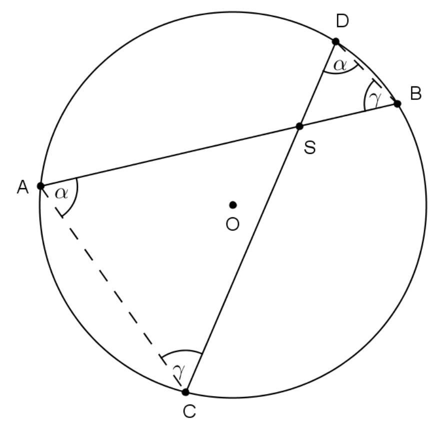
$$AC = AO \cdot \sin 30^\circ = \frac{AO}{2} = 1\text{cm},$$
$$OC = AO \cdot \cos 30^\circ = \frac{AO\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\text{cm},$$
$$BC = (2-\sqrt{3})\text{cm}.$$

Из $\triangle ABC$, важи да је

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}\Leftrightarrow AB=\sqrt{1+(2-\sqrt{3})^2}$$
$$\Leftrightarrow AB=\sqrt{8-4\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow AB=2\sqrt{2-\sqrt{3}}\text{cm}.$$



Слика 25



Слика 26

27. Како су периферијски углови над истом тетивом подударни, онда је (слика 26)

$$\measuredangle CAB=\measuredangle CAS=\measuredangle CDB=\measuredangle SDB$$

и

$$\measuredangle ACD=\measuredangle ACS=\measuredangle DBA=\measuredangle DBS.$$

Важи да је $\triangle ACS \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle DBS$, па је одатле

$$AS:CS=SD:BS\Leftrightarrow SD=\frac{AS\cdot BS}{CS}=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

28. Важи да је (слика 27)

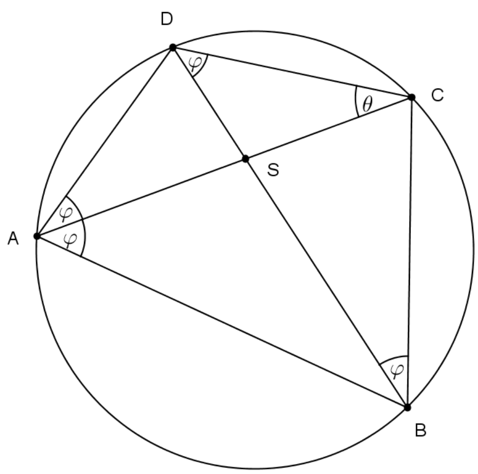
$$\measuredangle BDC=\measuredangle CBD=\measuredangle BAC=\measuredangle CAD=\varphi,$$

јер је $BC=CD$, па су то углови над тетивама исте дужине и онда су подударни. Након тога, видимо да је $\triangle ACD \overset{(\text{УУУ})}{\sim} \triangle CDS$, па је одатле

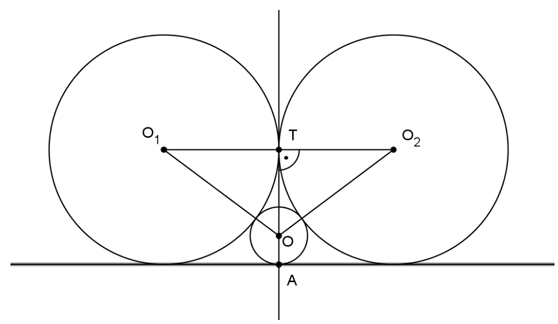
$$AC:CD=CD:CS\Leftrightarrow AC=\frac{CD^2}{CS}=\frac{36}{4}=9\text{cm}.$$

29. На слици 28 видимо да је $TA = O_1T = O_2T = 4\text{cm}$. Ако је $OA = r$, онда је $TO = 4-r$ и $OO_1 = 4+r$. У $\triangle O_1OT$ уочава се да је

$$\begin{aligned} OO_1^2 = OT^2 + TO_1{}^2 &\Leftrightarrow (4+r)^2 = 4^2 + (4-r)^2 \\ &\Leftrightarrow 16r = 16 \\ &\Leftrightarrow r = 1\text{cm}. \end{aligned}$$



Слика 27



Слика 28

За сва питања можете се обратити путем мејла teodora.trifunovic@gmail.com.